

017 Планиметрия

4.38. Параллелограмм и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.

б) Найдите длину DQ , если известно, что $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$.

4.39. Окружность проходит через вершины A и B параллелограмма $ABCD$, пересекает стороны AD и BC в точках M и N соответственно и касается стороны CD .

а) Докажите, что точки C , D , M и N лежат на одной окружности.

б) Найдите длину отрезка AD , зная, что $BM = a$, $MD = b$, $NC = c$.

4.40. В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$

а) Докажите, что A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 2\sqrt{3}$.

4.41. Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC , пересекает сторону AD в точке M , равноудалённой от вершин B и D .

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30^\circ$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM , если $BC = 9$.

4.42. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = \sqrt{21}$.

4.43. Точка M – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N .

- а) Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.
- б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM , если $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{4}{3}$.

4.44. Точка E — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K , так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O .

- а) Докажите, что $CO = KO$.
- б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD , если площадь треугольника BSK составляет 0,09 площади трапеции $ABCD$.

4.45. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B , причём точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB . Продолжения диаметра CA первой окружности и хорды CB этой окружности пересекают вторую окружности в точках D и E соответственно.

- а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.
- б) Найдите AD , если $\angle DAE = \angle BAC$ радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и $AB = 3$.

4.46. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. В треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся прямой CH в точках M и N соответственно.

- а) Докажите, что прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.
- б) Найдите площадь четырёхугольника MO_1NO_2 , если $AC = 20$ и $BC = 15$.

4.47. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. В треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся прямой CH в точках M и N соответственно.

- Докажите, что прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.
- Найдите площадь четырёхугольника MO_1NO_2 , если $AC = 12$ и $BC = 5$.

4.48. Точки E и K — соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O .

- Докажите, что вокруг четырёхугольника $ABOK$ можно описать окружность.
- Найдите AO , если сторона квадрата равна 1.

4.49. Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M , отличной от A . Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P .

- Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.
- Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K . Найдите отношение $QK : KA$.

4.50. Известно, что $ABCD$ трапеция, $AD = 2BC$, AD , BC — основания. Точка M такова, что углы ABM и MCD прямые.

- Доказать, что $MA = MD$.
- Расстояние от M до AD равно BC , а угол ADC равен 55° . Найдите угол BAD .

4.51. В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точке C и M .

а) Докажите, что угол BAM равен углу CAD .

б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O .

Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.

4.52. Дана равнобедренная трапеция, в которой $AD = 3BC$, CM — высота трапеции.

а) Доказать, что M делит AD в отношении $2:1$.

б) Найдите расстояние от точки C до середины BD , если $AD = 18$, $AC = 4\sqrt{13}$.

4.53. Дана трапеция с диагоналями равными 8 и 15. Сумма оснований равна 17. а) Докажите, что диагонали перпендикулярны.

б) Найдите площадь трапеции.

4.54. Дана трапеция с диагоналями равными 6 и 8. Сумма оснований равна 10. а) Докажите, что диагонали перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.

4.55. Дана трапеция $ABCD$, так, что $AD = 2BC$ и точка M внутри трапеции, $\angle ABM = \angle DCM = 90^\circ$.

а) Докажите, что $AM = DM$.

б) Найдите угол BAD , если угол CDA равен 50 градусов, а высота, проведённая из точки M к AD равна BC .

4.56. Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 3 и 4 пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая MK пересекающая обе окружности в точках M и K , причем точка A находится между ними.

а) Докажите, что треугольники BMK и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите расстояние от тчк B до прямой MK , если $O_1O_2 = 5$, $MK = 7$.

4.57. Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причем меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M , отличной от A . Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P .

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K . Найдите отношение $QK:KA$.

4.58. Точка E — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезок CK и BE пересекаются в точке O .

а) Доказать, что $CO = KO$.

б) Найти отношение оснований трапеции BC и AD , если площадь треугольника BCK составляет $\frac{4}{121}$ площади трапеции $ABCD$.

4.59. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 8MB$ и $DN = 2CN$.

а) Докажите, что $AD = 4BC$.

б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{6}$.

4.60. В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O .

а) Докажите, что $\sin \angle AOD = \sin \angle BOC$

б) Найдите S_{ABCD} , если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.

4.61. В треугольник ABC , в котором длина стороны AC меньше длины стороны BC , вписана окружность с центром O . Точка B_1 симметрична точке B относительно CO .

а) Докажите, что A, B, O и B_1 лежат на одной окружности.

б) Найдите площадь четырехугольника AOB_1B , если $AB = 10$, $AC = 6$ и $BC = 8$.

4.62. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A и острым углом при вершине D вписана окружность с центром O . Прямая DO пересекает сторону AB в точке M , а прямая CO пересекает сторону AD в точке K .

- Докажите, что $\angle AMO = \angle DKO$.
- Найдите площадь треугольника AOM , если $BC = 10$ и $AD = 15$.

4.63. В треугольник ABC , в котором длина стороны AC больше длины стороны BC , вписана окружность с центром O . Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой CO .

- Докажите, что A, B, O и B_1 лежат на одной окружности.
- Найдите площадь четырёхугольника $ABOB_1$, если $AB = 10, AC = 8$ и $BC = 6$.

4.64. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A .

- Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC .
- Пусть $\angle ABC = 90^\circ, AM = 3, CM = 2, Q$ — точка пересечения прямых KM и AB , а T — такая точка на отрезке PQ , что $\angle OAT = 45^\circ$. Найдите QT .

4.65. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Точки M и N середины сторон AB и CD соответственно. Окружность проходит через точки B и C и пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q , отличных от концов отрезков, соответственно.

- Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.
- Найдите QN , если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB = 26, BC = 4,5, CD = 25, AD = 21,5$.

4.66. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке K . Прямая касается первой окружности в точке A , а второй окружности в точке B . Луч BK пересекает первую окружность в точке D , луч AK пересекает вторую окружность в точке C .

- Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — трапеция.
- Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.

4.67. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

- Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.
- Найдите площадь треугольника APO , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 10, $\angle BAC = 75^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$.

4.68. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

- Докажите, что $OP = CP$.
- Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если расстояние от точки P до прямой AC равно 18, $\angle ABC = 60^\circ$.

4.69. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

- Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.
- Найдите площадь треугольника APC , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 8, $\angle ABC = 60^\circ$.

4.70. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 60° . Высоты BH и CM треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

- Докажите, что $AH = AO$.
- Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

4.71. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH .

а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках AH и BH соответственно как на диаметрах, равно $(\operatorname{tg} \angle ABC)$.

б) Пусть точка O_1 – центр окружности диаметром AH , вторично пересекающей отрезок AC в точке P , а точка O_2 — центр окружности диаметром BH , вторично пересекающей отрезок BC в точке Q .
Найдите площадь четырёхугольника O_1PQO_2 , если $AC = 12$, $BC = 10$.

4.72. Дан прямоугольный треугольник ABC . На катете AC отмечена точка M , а на продолжении катета BC за точку C – точка N так, что $CM = CB$ и $CA = CN$.

а) Пусть CH и CF — высоты треугольников ABC и NMC соответственно. Докажите, что CF и CH перпендикулярны.

б) Пусть L – это точка пересечения BM и AN , $BC = 2$, $AC = 5$.
Найдите ML .

4.73. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причем $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $CB_1 : B_1A = 3 : 1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

а) Докажите, что ADA_1B_1 – параллелограмм.

б) Найдите CD , если отрезки AD и BC перпендикулярны. $AC = 28$, $BC = 18$.

4.74. В треугольнике ABC провели высоту CC_1 и медиану AA_1 . Оказалось, что точки A , A_1 , C , C_1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AA_1 : CC_1 = 3 : 2$ и $A_1C_1 = 2$.

4.75. На стороне CD трапеции $ABCD$ отмечена точка M , которая является серединой этой стороны.

а) Докажите, что $S_{ABM} = 0,5 S_{ABCD}$.

б) На стороне CD отмечена точка K , такая, что $S_{BKC} = 0,5 S_{AKD}$, причем $AD = 2BC$. Расстояние от точки D до прямой AB равно 10. Найдите расстояние от точки K до стороны AB .

4.76. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника ABC вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке L . Прямая, проходящая через точку L и середину N гипотенузы AB , пересекает катет BC в точке M .

а) Докажите. $\angle BML = \angle BAC$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 20$ и $CM = 3\sqrt{5}$.

4.77. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A . На продолжении стороны AD за точку D взята точка N , такая, что $CN = CD$, а на продолжении стороны CD за точку D взята такая точка M , что $AD = AM$.

а) Докажите, что $BM = BN$

б) Найдите MN , если $AC = 7$, $\sin \angle BAD = 7/25$.

4.78. К окружности с диаметром $AB = 6$ проведена касательная BC так, что $BC = 3\sqrt{2}$. Прямая AC вторично пересекает окружность в точке D . Точка E диаметрально противоположна точке D . Прямые ED и BC пересекаются в точке F .

а) Докажите, что $BD^2 = CD \cdot BE$.

б) Найдите площадь треугольника FBE .

4.79. Две окружности касаются внутренним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на большей и меньшей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает меньшую окружность в точке D . Прямая BC вторично пересекает большую окружность в точке E .

а) Докажите, что AE параллельно BD .

б) Найдите AC , если радиусы окружностей равны 8 и 15.

4.80. Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C вписан в окружность. Биссектриса угла A пересекает описанную окружность в точке A_1 , биссектриса угла B пересекает описанную окружность в точке B_1 , биссектриса угла C пересекает описанную окружность в точке C_1 .

- а) Докажите, что угол $A_1BB_1 = 45^\circ$.
- б) Известно, что $AB = 2\sqrt{3}$. $\angle A = 60^\circ$. Найдите B_1C_1 .

4.81. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D . Окружность, описанная около треугольника ACD , пересекает сторону AB в точке E .

- а) Докажите, что треугольник CDE равнобедренный.
- б) Найдите площадь треугольника CDE , если $AB = 8$, $BC = 7$, $AC = 6$.

4.82. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Отрезок AP – диаметр окружности, описанной около треугольника ABC .

- а) Докажите, что прямая HP пересекает отрезок BC в его середине.
- б) Луч PH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке M . Найдите длину отрезка MC_1 , если расстояние от центра этой окружности до прямой BC равно 4, $\angle BPH = 120^\circ$.

4.83. Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C . Проведена высота CH . На сторонах AC и BC соответственно отмечены точки M и N так, что угол MHN прямой.

- а) Докажите, что треугольники MNH и ABC подобны
- б) Найдите BN , если $AM = 9$, $MC = 3$, $BC = 8$.

4.84. Окружность с центром O , построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает гипотенузу AB в точках A и D . Касательная проведенная к этой окружности в точке D , пересекает катет BC в точке M .

а) Докажите, что $BM = CM$

б) Прямая DM пересекает прямую AC в точке P , прямая OM пересекает прямую BP в точке K . Найдите $BK : KP$, если $\cos \angle BAC = 0,8$.

4.85. В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

4.86. Трапеция $ABCD$ с большим основанием AD и высотой BH вписана в окружность. Прямая BH вторично пересекает эту окружность в точке K .

а) Докажите, что прямые AC и AK перпендикулярны.

б) Прямые CK и AD пересекаются в точке N . Найдите AD , если радиус окружности равен 12 , $\angle BAC = 30^\circ$, а площадь четырехугольника $BCNH$ в 8 раз больше площади треугольника KNH .

4.87. Дана трапеция $ABCD$, где $AB = BC = CD$, точка E лежит на плоскости так, что $BE \perp AD$ и $CE \perp BD$.

а) Докажите, что углы AEB и BDA равны.

б) Найдите площадь трапеции, если $AB = 50$, а $\cos \angle AEB = 0,8$.