

014 Стереометрия

3.001. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5. На ребрах AA_1 и A_1C_1 выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = A_1N = 2$.

- Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
- Найдите угол между плоскостями BMN и ACC_1 .

3.002. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $SA = 7$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = SK = 1$.

- Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите объём пирамиды $BCKM$.

3.003. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании. Сторона AB равна 4, а BC равна $4\sqrt{2}$. Вершина пирамиды S проецируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершины A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ .

- Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ .
- Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если ребро $SD = 8$.

3.004. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ боковое ребро $SA = 14$, а сторона $AB = 8$. Точка M середина стороны AB . Плоскость α проходит через точки M и D и перпендикулярна плоскости ABC . Прямая SC пересекает плоскость α в точке K .

- Докажите, что $MK = KD$.
- Найдите объём пирамиды $MCDK$.

3.005. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ в которой $AB = 9$, точка M лежит на ребре AB так, что $AM = 8$. Точка K делит сторону SB так, что $SK : KB = 7 : 3$. Ребро $SA = \sqrt{43}$. Точки M и K принадлежат плоскости α , которая перпендикулярна плоскости ABC .

- Докажите, что точка C принадлежит плоскости α .
- Найдите площадь сечения α .

3.006. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ в которой $AB = 6$, точка M лежит на ребре AB так, что $AM = 5$. Точка K делит сторону SB так, что $SK : KB = 4 : 3$. Ребро $SA = 4\sqrt{3}$. Точки M и K принадлежат плоскости α , которая перпендикулярна плоскости ABC .

- Докажите, что точка C принадлежит плоскости α .
- Найдите площадь сечения α .

3.007. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой сторона основания $AB = 8$, боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{2}$. Точка Q — точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1 , точки M , N и K — середины BC , CC_1 и A_1C_1 соответственно.

- Докажите, что точки Q , M , N и K лежат в одной плоскости.
- Найдите площадь сечения QMN .

3.008. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 7. На ребре CC_1 отмечена точка M , причем $CM = 1$.

- Точки O и O_1 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM .
- Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ABM .

3.009. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 – середина AD . На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 – середина B_1E .

- а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE , если $AB = 4$, а $AA_1 = 1$.

3.010. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро $AA_1 = 7$. На ребре CC_1 отмечена точка M , причем $CM = 1$. Точки O и O_1 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно.

- а) Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM .
- б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ABM .

3.011. В прямом круговом цилиндре проведена образующая NN_1 , точка N лежит в нижнем основании. Отрезок KM_1 пересекает ось цилиндра, а точки K и M_1 лежат на окружностях нижнего и верхнего основания соответственно.

- а) Докажите, что треугольник KNM_1 прямоугольный.
- б) Найдите расстояние от точки N до прямой KM_1 , если $KN = 9$, $NN_1 = 20\sqrt{3}$, $N_1M_1 = 20$.

3.012. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AD = 14$, высота $SH = 24$. Точка K – середина бокового ребра SD , а точка N – середина ребра CD . Плоскость ABK пересекает боковое ребро SC в точке P .

- а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.
- б) Найдите расстояние от точки P до плоскости ABS .

3.013. Точка E лежит на высоте SO , а точка F — на боковом ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, причём $SE : EO = SF : FC = 2 : 1$.

- Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF , если $AB = 8$, $SO = 14$.

3.014. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, сторона основания $AB = 16$, высота $SH = 10$, точка K — середина AS .

Плоскость, проходящая через точку K и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра SB и SC в точках Q и P соответственно.

- Докажите, что площадь $PQBC$ относится к площади BSC как $3 : 4$.
- Найдите объём пирамиды $KBQPC$.

3.015. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $SA = 7$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = SK = 1$.

- Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите объём пирамиды $BCKM$.

3.016. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB .

- Докажите, что $SA = SC$.
- Найдите угол между плоскостями SAC и ABC , если $AB = 30$, $SC = 17$, $CB = 24$.

3.017. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, $AB = 24$, высота SH , проведённая к основанию, равна 14 , точка K — середина AS , точка N — середина BC . Плоскость, проходящая через точку K и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра SB и SC в точках Q и P соответственно.

- а) Докажите, что PQ проходит через середину отрезка SN .
б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью APQ .

3.018. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, M — середина AB , N — середина CS .

- а) Докажите, что проекции отрезков MN и AS на плоскость ABC равны. б) Найдите объем пирамиды $SABC$, если $AS = 8$, $MN = 5$.

3.019. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $SA = 7$. Точка M лежит на ребре BC , причем $BM = 1$, точка K лежит на ребре SC , причем $SK = 4$.

- а) Докажите, что плоскость MKD перпендикулярна плоскости основания пирамиды. б) Найдите объем пирамиды $CDKM$.

3.020. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = 7$, а боковое ребро $SA = 10$. Точка M лежит на ребре BC , причем $BM = 4$, точка K лежит на ребре SC , причем $SK = 7$.

- а) Докажите, что плоскость MKD перпендикулярна плоскости основания пирамиды. б) Найдите объем пирамиды $CDKM$.

3.021. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ в которой $AB = 6$ и $AA_1 = 3$. Точки O и O_1 являются центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. На ребре CC_1 отмечена точка M такая что $CM = 1$.

- а) Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM .
б) Найдите объем пирамиды $ABMC_1$.

3.022. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 8$, а боковое ребро $SA = 7$. На

рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 2$, $SK = 1$.

- а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .
- б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

(2022, 2023)

3.023. Дан правильный треугольник ABC . Точка D лежит вне плоскости ABC , $\cos \angle BAD = \cos \angle CAD = 0,3$

- а) Докажите, что прямые AD и BC перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между прямыми AD и BC , если $AC = 6$.

3.024. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ со стороной 10. Известно, что $SA = SC = 10\sqrt{2}$, $SB = 20$ и $FD = 10$.

- а) Докажите, что ребро SD перпендикулярно плоскости основания пирамиды $SABCD$.
- б) Найдите расстояние между прямыми AC и SB .

3.025. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N являются серединами рёбер AB и AD соответственно.

- а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.
- б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 6$.

3.026. Дан тетраэдр $ABCD$, на ребрах AC , AD , BD , BC отмечены точки K , L , M , N соответственно так, что $AK : KC = 3 : 7$, а $KLMN$ — квадрат со стороной 3.

- а) Докажите, что $BM : MD = 3 : 7$
- б) Найдите расстояние от точки C до KLM , если известно, что объём тетраэдра $ABCD$ равен 50.

3.027. Дан тетраэдр $ABCD$. На ребре AC выбрана точка K так, что $AK : KC = 3 : 7$. Также на ребрах AD , BD и BC выбраны точки L , M и N соответственно так, что $KLMN$ — квадрат со стороной 3.

- а) Докажите, что ребра AB и CD взаимно перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние от точки B до плоскости $KLMN$, если объем тетраэдра $ABCD$ равен 100.

3.028. Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K , L , M , N лежат на ребрах AC , AD , DB и BC соответственно, так, что четырехугольник $KLMN$ квадрат со стороной 2, $AK : KC = 2 : 3$.

- а) Докажите, что $BM : MD = 2 : 3$.
- б) Найдите расстояние от точки C до плоскости $KLMN$, если известно, что объем тетраэдра $ABCD$ равен 25.

3.029. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.
- б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD = 10$, $BC = 8$, $SO = 8$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

3.030. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Точка M — середина SA , на ребре SB отмечена точка N так, что $SN : NB = 1 : 2$.

- а) Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD .
- б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью CMN , если все рёбра равны 12.

3.031. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ длины всех боковых рёбер равны длине ребра AD , а длина каждого из рёбер AB , BC и CD ровно в два раза меньше, чем длина ребра AD .

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину ребра AD .

б) Найдите, в каком отношении плоскость BMN делит высоту пирамиды, считая от вершины S , если точка M — середина ребра SD , а точка N делит ребро SC в отношении $SN : NC = 3 : 1$.

3.032. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. На ребрах SA , SB , SC и SD отмечены точки L , K , N и M соответственно так, что четырёхугольник $KLMN$ — трапеция с основанием $KL = 3$ и $MN = 2$. Известно, что $SK : KB = 3 : 1$.

а) Докажите, что плоскость KLM пересекает ребра SC и SD в их серединах.

б) Найдите высоту SH пирамиды, если точка пересечения диагоналей пирамиды совпадает с точкой H , площадь основания равна 24, а площадь сечения $KLMN = 10$.

3.033. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Плоскость α пересекает ребра SA , SB , SC и SD в точках L , K , N и M соответственно, причем $SK : KB = 3 : 1$, а точки L и M — середины рёбер SA и SD .

а) Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ является трапецией, длины оснований которой относятся как $2 : 3$.

б) Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостями ABC и α равен 30° , площадь сечения пирамиды плоскостью α равна $10\sqrt{2}$, а площадь основания пирамиды равна 32.

3.034. Грани ABD и ACD тетраэдра $ABCD$ являются правильными треугольниками со стороной 10 и перпендикулярны друг другу. На рёбрах AB , AD и CD отмечены точки K , L и M соответственно, причём $BK = 2$, $AL = 4$, $MD = 3$.

- а) Докажите, что плоскость KLM перпендикулярна ребру CD .
- б) Найдите длину отрезка пересечения грани ABC и плоскости KLM .

3.035. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$.

- а) Докажите, что $BD = CD$.
- б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 2 : 3$. Найдите площадь сечения MNB .