

2018 МГУ имени М.В. Ломоносова ДВИ по математике
июль 2018 года
Вариант 18-1

1. Какое из чисел $49/18$ и $79/24$ ближе к 3?
2. Найдите все значения параметра a , при которых разность между корнями уравнения $x^2 + 3ax + a^4 = 0$ максимальна.
3. Решите уравнение $\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x$.
4. Решите неравенство: $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}x} \geq (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\log_x(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$
5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Пусть M — середина отрезка AD , а N — произвольная точка отрезка BC . Пусть K — пересечение отрезков CM и DN , а L — пересечение отрезков MN и AC . Найдите все возможные значения площади треугольника DMK , если известно, что $AD : BC = 3 : 2$, а площадь треугольника ABL равна 4.

6. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \leq 0 \\ ay^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA' , BB' , CC' , DD' . На ребрах AB , BC , CD , DA нижнего основания отмечены соответственно точки K , L , M , N , таким образом, что $AK : KB = 4 : 5$, $BL : LC = 3 : 1$, $CM : MD = 7 : 2$, $DN : NA = 3 : 1$. Пусть P , Q , R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$, соответственно. Найдите PQ , если известно, что $QR = 1$ и $AB : BC = 3 : 2$.

8. Найдите все пары чисел x , y из промежутка $(0, \frac{\pi}{2})$, при которых достигается минимум выражения:

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)} + 1 \right) \left(\frac{\sqrt{2}\sin x}{3\sin y} + 1 \right)^2 \left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x} + 1 \right)^4$$